Title	カオス・乱流への統計力学的アプローチ(4)カオス・量子カオスと平衡・非平衡統計力学,京大基研短期研究会 量子力学とカオス-基礎的問題からナノサイエンスまで-,研究会報告)
Author(s)	森, 肇
Citation	物性研究 (2004), 82(5): 745-748
Issue Date	2004-08-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/97855
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

カオス・乱流への統計力学的アプローチ

九州大学名誉教授　森 肇

ブラウン運動の射影演算子法 (H.Mori, 1965) を拡張して，軌道不安定性によるカオス・乱流のランダムな揺らぎを記述する線形確率微分方程式を導出し，ランダムな運動へのエネルギー散逸や諸々の輸送現象などの統計力学的理論を構築できる．その理論的骨組を文献 1), 2) の論文に従って述べた．

1　カオス軌道に対する線形確率微分方程式

諸種の非線形力学系が，正の Liapunov 指数をもち，初期値敏感性や初期記憶の喪失，更に，エネルギー散逸や輸送現象など，軌道不安定性による諸々の性質を示す．これらを理論的に解明するため，カオス・乱流のランダムな揺らぎを記述する線形確率微分方程式 (一般に非マルコフ型) を，射影演算子法 [3] により力学系の非線形運動方程式から厳密に導出する．[1, 2]

系の相空間の状態変数を $X(t) = \{X_j(t)\}$ $(j = 1, 2, \cdots, d)$ とし，カオス・乱流における観測量 $A(t) = \{A_l(t)\}$ $(l = 1, 2, \cdots, \delta)$ $(\delta \leq d)$ の揺らぎを考える．そのとき，$A(t)$ の時間発展を与える運動方程式は

$$dA(t)/dt = \dot{A}(t) = \Lambda A(t), \quad (\Lambda \equiv \sum_{j=1}^{d} \dot{X}_j \frac{\partial}{\partial X_j}) \tag{1}$$

とかけ，$A(t) = \exp[t\Lambda]A(0)$ と積分できる．いま，$A_l(t)$ と $A_m(0)$ との時間相関を長時間平均

$$\langle A_l(t) A_m^\dagger(0) \rangle \equiv \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau ds\, A_l(t+s) A_m^\dagger(s) \tag{2}$$

で定義すれば，$A(t)$ の時間発展の最確値は，緩和関数

$$\Xi(t) \equiv \langle A(t) A^\dagger \rangle \langle A A^\dagger \rangle^{-1} \tag{3}$$

を使って，$\Xi(t)A$ によって与えられる．この最確値の時間発展を，運動方程式 (1) から陽に取り出すために，先にブラウン運動論で導入した射影演算子 [3]

$$\mathcal{P}G(X) = \langle G(X) A^\dagger \rangle \langle A A^\dagger \rangle^{-1} A \tag{4}$$

を使う．

ここでは２つのカオス系を例にとる．一つは，位置 q と運動量 p の一次元 Duffing 振動子

$$dp/dt = -\gamma^0 p + v(q) + b\cos(\omega_0 t + \phi_0), \tag{5}$$

$$v(q) \equiv -q^3 + q \tag{6}$$

である．ここで，γ^0 は分子摩擦係数，b は位相 $\phi=\omega_0 t+\phi_0$ の周期外力の振幅である．$v(q)$ はポテンシャル力であり，その非線形項がカオスを惹き起すのである．この系の相空間は $X=\{q,p,\phi\}$ であるが，着目する観測量は $A=\{q,p\}$ としよう．そのとき，(1) の発展演算子 Λ は

$$\Lambda = p\frac{\partial}{\partial q} + \{-\gamma^0 p + v(q) + b\cos\phi\}\frac{\partial}{\partial p} + \omega_0\frac{\partial}{\partial \phi} \tag{7}$$

となり，$\langle q\rangle=\langle p\rangle=\langle qp\rangle=0$ だから，射影演算子 (4) は

$$\mathcal{P}G \equiv \{\langle Gq\rangle/\langle q^2\rangle\}q + \{\langle Gp\rangle/\langle p^2\rangle\}p \tag{8}$$

となる．

もう一つのカオス系は，非圧縮性流体の Navier-Stokes 方程式である．いま，流速 $\{u_\alpha(\boldsymbol{r})\}$ の空間的フーリエ成分 $\{u_{\alpha\boldsymbol{k}}\}(0<k<k_C\sim 10^3\mathrm{cm}^{-1})$ をとり，慣性小領域 $k_L<k<k_I(\ll k_C)$ において乱流が発達しているとすれば，Navier-Stokes 方程式は

$$\begin{aligned} du_{\alpha\boldsymbol{k}}/dt &= -\nu^0 k^2 u_{\alpha\boldsymbol{k}} + V_{\alpha\boldsymbol{k}}(u) + K_{\alpha\boldsymbol{k}}, &(9)\\ V_{\alpha\boldsymbol{k}}(u) &= \sum_{\beta,\gamma}\sum_{\boldsymbol{p}}{}' V_{\alpha\beta\gamma}(\boldsymbol{k})u_{\beta\boldsymbol{p}}u_{\gamma\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}} &(10)\end{aligned}$$

となる．ここで，ν^0 は動的分子粘性，$K_{\alpha\boldsymbol{k}}$ は低波数領域 $k<k_L$ に働く一定の外力である．(10) の $\sum_{\boldsymbol{p}}{}'$ は，$k_L<p<k_C$ なる波動ベクトル $\boldsymbol{p}$ にわたる和である．この $V_{\alpha\boldsymbol{k}}(u)$ が，乱流を惹き起した非線形慣性力である．この系では，相空間の状態変数 X も着目する観測量 A も同一で，$X=A=\{u_{\alpha\boldsymbol{k}}\}(0<k<k_C)$ とすれば，(1) の発展演算子 Λ は

$$\Lambda = \sum_\alpha\sum_{\boldsymbol{k}}\{-\nu^0 k^2 u_{\alpha\boldsymbol{k}} + V_{\alpha\boldsymbol{k}}(u) + K_{\alpha\boldsymbol{k}}\}\frac{\partial}{\partial u_{\alpha\boldsymbol{k}}} \tag{11}$$

となり，更に，乱流は統計的に一様で等方的とすれば

$$\langle u_{\alpha\boldsymbol{k}}u^\dagger_{\beta\boldsymbol{l}}\rangle = \langle|u_{\alpha\boldsymbol{k}}|^2\rangle\delta_{\alpha\beta}\delta_{\boldsymbol{kl}} \tag{12}$$

となり，射影演算子 (4) は

$$\mathcal{P}G(u) = \sum_\alpha\sum_{\boldsymbol{k}}\{\langle G(u)u^\dagger_{\alpha\boldsymbol{k}}\rangle/\langle|u_{\alpha\boldsymbol{k}}|^2\rangle\}u_{\alpha\boldsymbol{k}} \tag{13}$$

となる．

カオス系の観測量 $A(t)$ の時間発展方程式 (1) の形態は，具体例 (5) と (9) とを一般化して

$$dA(t)/dt = \dot{A}(t) = V^0(A(t)) + V(X(t)) + K(X(t)) \tag{14}$$

のように，３つのタイプの項からなる．その第２項 $V(X)$ は，(5) の非線形力 $v(q)$ や (9) の非線形慣性力 $V_{\alpha\boldsymbol{k}}(u)$ のように，カオス・乱流を惹き起す非線形力であり，$K(X)$ は，散逸するエネルギーを補給する周期外力である．$V^0(A)$ は，(5) の $-\gamma^0 p$ や (9) の $-\nu^0 k^2 u_{\alpha\boldsymbol{k}}$ のような残りの

項で，一般に A の関数である．いま非線形力 $V(X(t))$ に着目し，これを射影演算子 (4) の $\mathcal{P}$ および $\mathcal{Q}=1-\mathcal{P}$ を使って

$$V(X(t)) = e^{t\Lambda}\{\mathcal{P}+\mathcal{Q}\}V(X) = i\Omega A(t) + e^{t\Lambda}\mathcal{Q}V(X) \tag{15}$$

と変形しよう．ここで $i\Omega \equiv \langle V(X)A^{\dagger}\rangle\langle AA^{\dagger}\rangle^{-1}$ とした．次に，真に非線形な力 $F(t) \equiv e^{t\Lambda}\mathcal{Q}V(X)$ を導入しよう．これは，恒等式

$$e^{t\Lambda} = e^{t\mathcal{Q}\Lambda} + \int_0^t ds\, e^{(t-s)\Lambda}\mathcal{P}\Lambda e^{s\mathcal{Q}\Lambda} \tag{16}$$

を使えば，本理論の最も基本的な式

$$F(t) \equiv e^{t\Lambda}\mathcal{Q}V(X) = R(t) - \int_0^t ds\, \Gamma(s)A(t-s) \tag{17}$$

を与える．ここで，揺動力 $R(t)$, $\widetilde{R}$ と記憶関数 $\Gamma(t)$

$$\begin{aligned} R(t) &\equiv e^{t\mathcal{Q}\Lambda}\mathcal{Q}V(X), \quad \widetilde{R} \equiv \mathcal{Q}\Lambda A, \qquad (18)\\ \Gamma(t) &\equiv \langle R(t)\widetilde{R}^{\dagger}\rangle\langle AA^{\dagger}\rangle^{-1} \qquad (19)\end{aligned}$$

を定義した． $R(t)$ の propagator $e^{t\mathcal{Q}\Lambda}$ の射影演算子 $\mathcal{Q}$ は，$F(t)$ から時間スケール τ_M の線形長時間運動を排除し， (17) の第２項のように，それを $A(t)$ の線形発展にくり込むものである．この第２項が，カオス・乱流による線形輸送項を与えることになるのである．

(17) を (15) の第２項に入れ，この (15) を (14) に入れれば，カオス・乱流の式

$$\frac{d}{dt}A(t) - V^0(A(t)) - i\Omega A(t) + \int_0^t ds\, \Gamma(s)A(t-s) = R(t) + K(X(t)) \tag{20}$$

が得られる．ここで $\langle R(t)A^{\dagger}\rangle = 0$ であり， (5) や (9) のように $V^0(A) = \{i\Omega^0 - \Gamma^0\}A$ であれば，この (20) は緩和関数 (3) の時間発展に対して線形方程式を与え，そのラプラス変換は

$$\Xi(z) \equiv \int_0^{\infty} dt\, e^{-zt}\Xi(t) = \frac{1}{z - i(\Omega^0+\Omega) + \Gamma^0 + \Gamma(z)}\{1 + L(z)\} \tag{21}$$

となる．ここで $L(z)$ は $\langle K(X(t))A^{\dagger}\rangle\langle AA^{\dagger}\rangle^{-1}$ のラプラス変換である．$\Gamma(z)$ は (19) の $\Gamma(t)$ のラプラス変換であり，

$$\Gamma(i\omega) = \int_0^{\infty} dt\, e^{-i\omega t}\langle R(t)\widetilde{R}^{\dagger}\rangle\langle AA^{\dagger}\rangle^{-1} \tag{22}$$

が振動数 ω の弱い外力に対する線形輸送係数を与える．(19) と (22) が，カオス・乱流に対する揺動散逸定理を与える．

Duffing 振動子 (5) にこの方法を適用すれば， (20) から，カオスの式

$$\frac{d}{dt}p + \gamma^0 p + \Omega_0^2 q + \int_0^t ds\, \gamma(s)p(t-s) = r(t) + b\cos(\omega_0 t + \phi_0) \tag{23}$$

が得られる．ここで， $\Omega_0^2 \equiv -\langle v(q)q\rangle/\langle q^2\rangle$,

$$\begin{aligned} \gamma(t) &\equiv \langle r(t)\tilde{r}\rangle/\langle p^2\rangle, \qquad (24)\\ r(t) &\equiv e^{t\mathcal{Q}\Lambda}\mathcal{Q}v(q),\ \tilde{r} \equiv \mathcal{Q}\dot{p} \qquad (25)\end{aligned}$$

とした．更に $\langle r(t)q\rangle = \langle r(t)p\rangle = 0$ である．式 (23) の線形輸送項の記憶関数 $\gamma(s)$ は，(19) と (22) に対応して，カオス誘導摩擦係数として

$$\gamma(i\omega) \equiv \int_0^\infty dt\, e^{-i\omega t}\gamma(t) = \frac{1}{\langle p^2\rangle}\int_0^\infty dt\, e^{-i\omega t}\langle r(t)\tilde{r}\rangle \tag{26}$$

を与える．

Navier-Stokes 方程式 (9) に (20) 式を適用すれば，乱流の式

$$\frac{d}{dt}u_{\alpha\boldsymbol{k}}(t) + \nu^0 k^2 u_{\alpha\boldsymbol{k}}(t) + \int_0^t ds\, \gamma_{\alpha\boldsymbol{k}}(s)u_{\alpha\boldsymbol{k}}(t-s) = r_{\alpha\boldsymbol{k}}(t) + K_{\alpha\boldsymbol{k}} \tag{27}$$

が得られる．ここで，揺動力 $r_{\alpha\boldsymbol{k}}(t)$ と 記憶関数 $\gamma_{\alpha\boldsymbol{k}}(t)$

$$r_{\alpha\boldsymbol{k}}(t) \equiv e^{tQ\Lambda}QV_{\alpha\boldsymbol{k}}(u), \tag{28}$$

$$\gamma_{\alpha\boldsymbol{k}}(t) \equiv \langle r_{\alpha\boldsymbol{k}}(t)r^{\dagger}_{\alpha\boldsymbol{k}}\rangle/\langle|u_{\alpha\boldsymbol{k}}|^2\rangle \tag{29}$$

を定義した．更に $\langle r_{\alpha\boldsymbol{k}}(t)u^{\dagger}_{\alpha\boldsymbol{k}}\rangle = 0$, $\langle K_{\alpha\boldsymbol{k}}u^{\dagger}_{\alpha\boldsymbol{k}}\rangle = 0$ と考えられるので，流速 $u_{\alpha\boldsymbol{k}}(t)$ の緩和関数 $\xi_{\alpha\boldsymbol{k}}(t)$ は (21) から

$$\xi_{\alpha\boldsymbol{k}}(z) \equiv \int_0^\infty dt\, e^{-zt}\langle u_{\alpha\boldsymbol{k}}(t)u^{\dagger}_{\alpha\boldsymbol{k}}\rangle/\langle|u_{\alpha\boldsymbol{k}}|^2\rangle, \tag{30}$$

$$= \frac{1}{z + \{\nu^0 + \nu'(k, z/i)\}k^2} \tag{31}$$

と求まる．ここで，波数 k, 振動数 ω の乱流粘性は

$$\nu'(k,\omega) \equiv \frac{\gamma_{\alpha\boldsymbol{k}}(z=i\omega)}{k^2} = \frac{1}{k^2\langle|u_{\alpha\boldsymbol{k}}|^2\rangle}\int_0^\infty dt\, e^{-i\omega t}\langle r_{\alpha\boldsymbol{k}}(t)r^{\dagger}_{\alpha\boldsymbol{k}}\rangle \tag{32}$$

によって与えられる．なお，(22)，(26)，(32) がカオス・乱流に対する揺動散逸定理を与える．

参考文献

[1] H. Mori, S. Kuroki, H. Tominaga, R. Ishizaki and N. Mori, Prog. Theor. Phys. **109** (2003), 333.

[2] H. Mori, S. Kuroki, H. Tominaga, R. Ishizaki and N. Mori, Prog. Theor. Phys. (to be submitted).

[3] H. Mori, Prog. Theor. Phys. **33** (1965), 423.